Aufgabe 1 (S. 110/13). Betrachte die Funktion $f : x \mapsto x^2 + 4x + 3$ und die Funktion $h_a : x \mapsto ax^2$.

(a) Zeichne die Graphen von f und von h_a für $a = 0.5$ und $a = -1$.

(b) Berechne die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen. Mache eine Fallunterscheidung.

(c) Zeichne den Graphen derjenigen Funktion h_a, der G_f berührt. Berechne die Koordinaten des Berührpunktes.

Lösung zu (a). Graph von f und h_a mit $a = 0 - 5$ und $a = -1$ in Abb. 1. ■

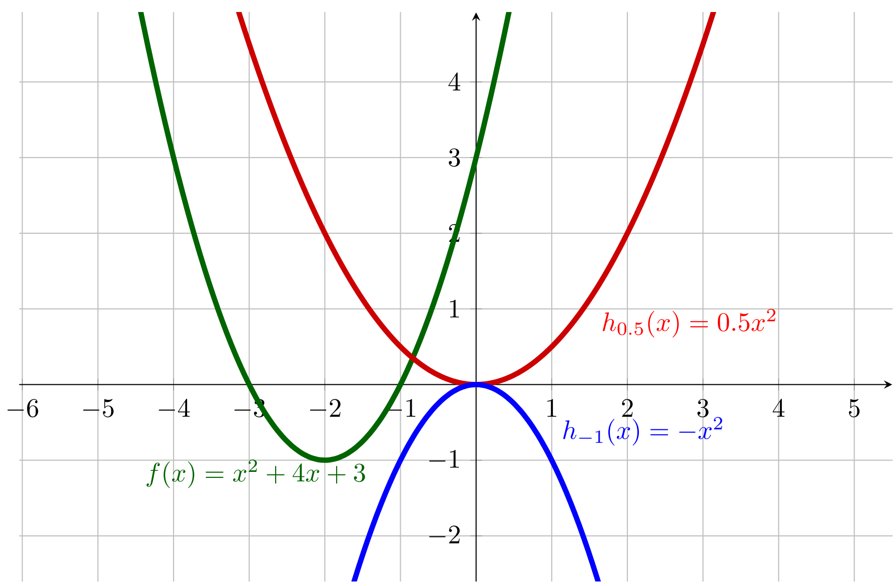

Abbildung 1: Graphen zur Teilaufgabe a

Lösung zu (b). Um den Schnittpunkt zweier Funktionen zu bestimmen muss man zuerst die Funktionsterme gleichsetzen:

$$f(x) = h_a(x) \tag{1}$$
$$x^2 + 4x + 3 = ax^2 \tag{2}$$
$$0 = (a-1)x^2 - 4x - 3 \tag{3}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-3)(a-1)}}{2(a-1)} \tag{4}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{12a + 4}}{2a - 2} \tag{5}$$

Damit mindestens ein Schnittpunkt existiert, muss $D \geq 0$ gelten.

$$12a + 4 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{3} \tag{6}$$

Für $a \geq \frac{1}{3}$ ist die Schnittstelle bei $x = \frac{4 \pm \sqrt{12a+4}}{2a-2}$ ■

Lösung zu (c). Damit sich zwei Funktionen berühren, dürfen sie nur einen Schnittpunkt besitzen. ⇒ Die Diskriminante muss $D = 0$ sein.
(6) kann man aus Teilaufgabe (b) zu

$$12a + 4 = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{3} \tag{7}$$

umformen, d.h. wir haben den Funktionsterm

$$h(x) = -\frac{1}{3}x^2 \tag{8}$$

Nun können wir auch diese Funktionen gleich setzen:

$$h(x) = f(x) \tag{9}$$
$$-\frac{1}{3}x^2 = x^2 + 4x + 3 \qquad |\text{nach } x \text{ umformen} \tag{10}$$
$$x = -\frac{3}{2} \tag{11}$$
$$\Longrightarrow y = -0,75 \tag{12}$$

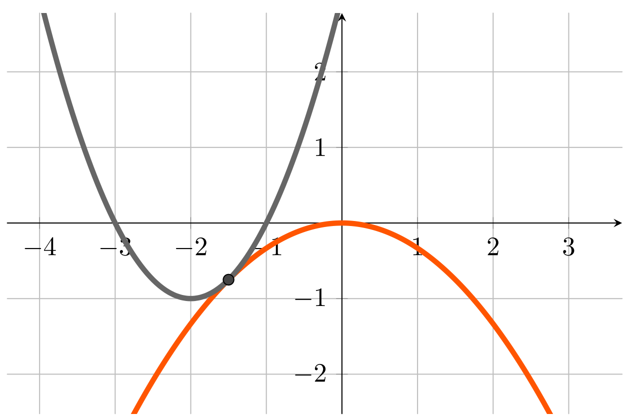

Abbildung 2: Die Funktion f in grau und die Funktion $h_{a=-1/3}$ in orange.

■