Analysis in der Physik am Beispiel der Kinematik

Lukas Semrau

lukas@lukas-semrau.de
Fachbereich Physik
Schüler

30 März 2021

Vorraussetzungen.

Physik	**Mathematik**
Klasse 7: Geschwindigkeit und Beschleunigung	Oberstufe: Ableitung und Integral

Gliederung

Wann ist eine Bewegung geradlinig?

Definition 2.1 (geradlinige Bewegung)

Bewegt sich ein Objekt immer mit der selben Geschwindigkeit ($a = 0$), so bewegt es sich gleichförmig.

Wann ist eine Bewegung geradlinig?

Definition 2.1 (geradlinige Bewegung)

Bewegt sich ein Objekt immer mit der selben Geschwindigkeit ($a = 0$), so bewegt es sich gleichförmig.

Was bedeutet das konkret?

Wann ist eine Bewegung geradlinig?

Definition 2.1 (geradlinige Bewegung)

Bewegt sich ein Objekt immer mit der selben Geschwindigkeit ($a = 0$), so bewegt es sich gleichförmig.

Was bedeutet das konkret?

Ein Objekt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $v =$ const., also mit gleichbleibender Geschwindigkeit oder gar nicht.

Fahrstuhl

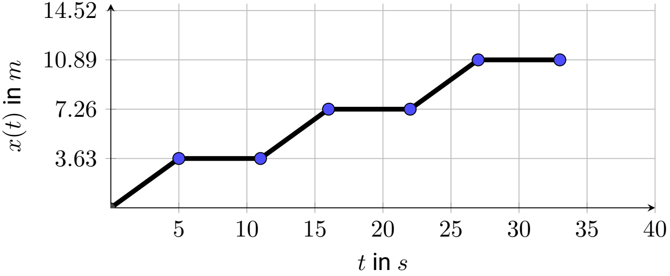


Abbildung 1: Bewegung eines Fahrstuhls

Durchschnittgeschwindigkeit

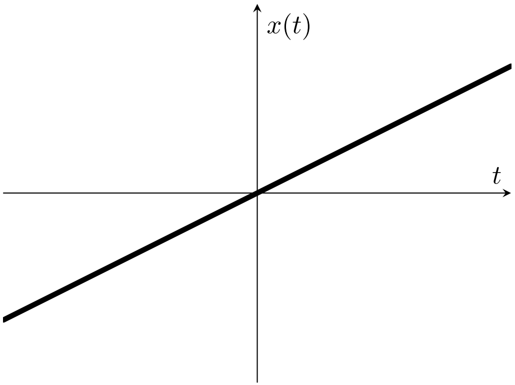


Abbildung 2: Ein t-x-Diagramm

Durchschnittgeschwindigkeit

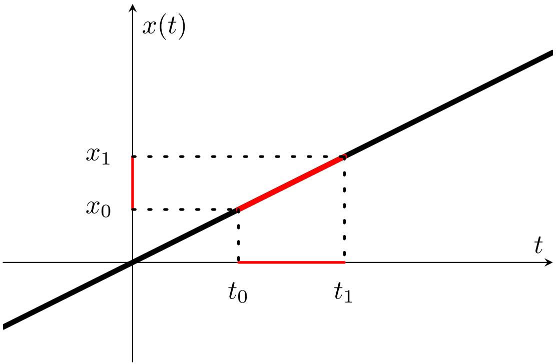


Abbildung 3: zurückgelegter Weg x in einer Zeit t

Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung

- Der Zeitabstand zwischen t_0 und t_1 ist $\Delta t := t_1 - t_0$

Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung

- Der Zeitabstand zwischen t_0 und t_1 ist $\Delta t := t_1 - t_0$
- Die zurückgelegte Strecke zwischen den Orten x_0 und x_1 ist $\Delta x(t) := x_1 - x_0 = x\left(t_1\right) - x\left(t_0\right)$

Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung

- Der Zeitabstand zwischen t_0 und t_1 ist $\Delta t := t_1 - t_0$
- Die zurückgelegte Strecke zwischen den Orten x_0 und x_1 ist $\Delta x(t) := x_1 - x_0 = x(t_1) - x(t_0)$
- Bei geradlinigen Bewegungen ($v =$ const.) ist die der Graph eines t-x-Diagramms eine Gerade.

Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung

- Der Zeitabstand zwischen t_0 und t_1 ist $\Delta t := t_1 - t_0$
- Die zurückgelegte Strecke zwischen den Orten x_0 und x_1 ist $\Delta x(t) := x_1 - x_0 = x(t_1) - x(t_0)$
- Bei geradlinigen Bewegungen ($v =$ const.) ist die der Graph eines t-x-Diagramms eine Gerade.
- die Steigung einer Gerade ist definiert als

$$m_{\text{Gerade}} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \tag{3.1}$$

Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung

- Der Zeitabstand zwischen t_0 und t_1 ist $\Delta t := t_1 - t_0$
- Die zurückgelegte Strecke zwischen den Orten x_0 und x_1 ist $\Delta x(t) := x_1 - x_0 = x\left(t_1\right) - x\left(t_0\right)$
- Bei geradlinigen Bewegungen ($v = $const.) ist die der Graph eines t-x-Diagramms eine Gerade.
- die Steigung einer Gerade ist definiert als

$$m_{\text{Gerade}} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \tag{3.1}$$

- Die Steigung ist also die Durchschnittgeschwindigkeit über eine Zeit Δt.

Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung

Definition 3.1

Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Geraden in einem t-x-Diagramm.

[1] noch nicht bestimmbar

Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung

Definition 3.1

Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Geraden in einem t-x-Diagramm.

Anmerkung

Ändert sich die Steigung

[1] noch nicht bestimmbar

Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung

Definition 3.1

Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Geraden in einem t-x-Diagramm.

Anmerkung

Ändert sich die Steigung, so ist die Geschwindigkeit zwischen zwei Zeitpunkten nur eine Durchschnttgeschwindigkeit.

[1] noch nicht bestimmbar

Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung

Definition 3.1

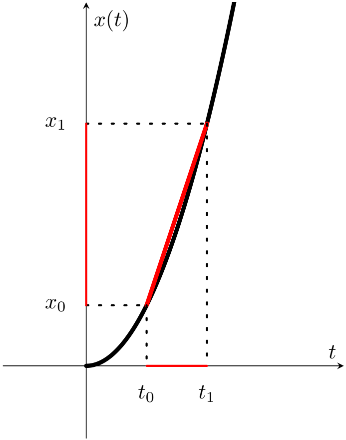
Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Geraden in einem t-x-Diagramm.

Anmerkung

Ändert sich die Steigung, so ist die Geschwindigkeit zwischen zwei Zeitpunkten nur eine Durchschnttgeschwindigkeit. Und die Geschwindigkeit an einem Zeitpunkt ist nicht bestimmbar[1].

[1] noch nicht bestimmbar

nicht geradlinige Bewegungen



nicht geradlinige Bewegungen

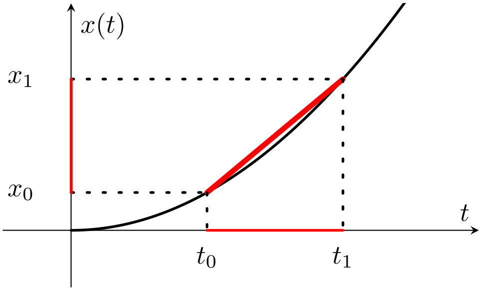


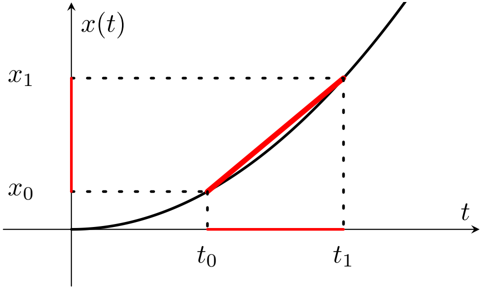
Abbildung 5: t-x-Diagramm einer nicht geradliniegen Bewegung ("vergrößert")

nicht geradlinige Bewegungen

Die Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \tag{3.2}$$

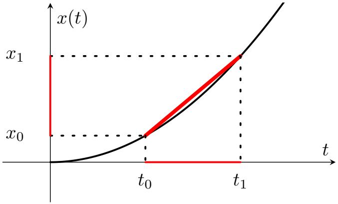
ist nur eine Durchschnittgeschwindigkeit.



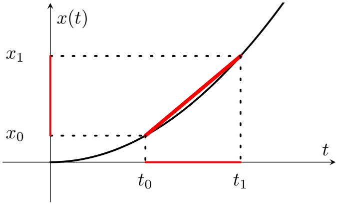
v an einem Zeitpunkt t_0

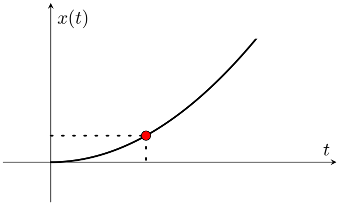
für geradlinige Bewegungen. Für geradlinige Bewegungen mit $v = m =$ const. ist die Durchschnittgeschwindigkeit die Geschwindigkeit an einem Zeitpunkt t_0.

v an einem Zeitpunkt t_0

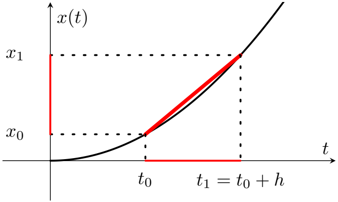


v an einem Zeitpunkt t_0



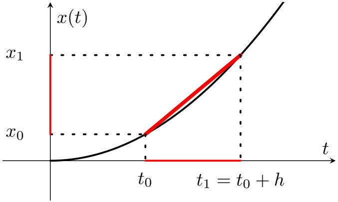


v an einem Zeitpunkt t_0



Betrachte man zwei Zeiten t_0 und $t_1 = t_0 + h \Rightarrow h$ ist dann Δt.

v an einem Zeitpunkt t_0

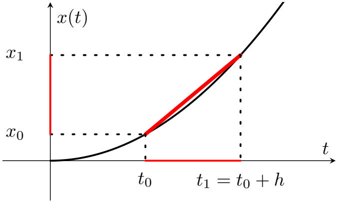


Betrachte man zwei Zeiten t_0 und $t_1 = t_0 + h \Rightarrow h$ ist dann Δt.

Für die Durchshcnittsgeschwindigkeit gilt dann:

$$v_D = \frac{x(t_0 + h) - x(t)}{h} \qquad (3.3)$$

v an einem Zeitpunkt t_0



Betrachte man zwei Zeiten t_0 und $t_1 = t_0 + h \Rightarrow h$ ist dann Δt.

Für die Durchshcnittsgeschwindigkeit gilt dann:

$$v_D = \frac{x(t_0 + h) - x(t)}{h} \qquad (3.3)$$

Für die Geschwindigkeit an t_0 muss $h \to 0$:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t)}{h} \qquad (3.4)$$

v an einem Zeitpunkt t_0

(3.4) hat große Ähnlichkeiten mit dem Differenzenquotient,

v an einem Zeitpunkt t_0

(3.4) hat große Ähnlichkeiten mit dem Differenzenquotient, für die Geschwindigkeit an t_0 gilt:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t)}{h} \tag{3.5}$$

v an einem Zeitpunkt t_0

(3.4) hat große Ähnlichkeiten mit dem Differenzenquotient, für die Geschwindigkeit an t_0 gilt:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t)}{h} \tag{3.5}$$

Definition 3.2

Die Geschwindigkeit an einem Zeitpunkt t_0 ist definiert als die Ableitung des Ortes x nach der Zeit t.

v an einem Zeitpunkt t_0

(3.4) hat große Ähnlichkeiten mit dem Differenzenquotient, für die Geschwindigkeit an t_0 gilt:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t)}{h} \tag{3.5}$$

Definition 3.2

Die Geschwindigkeit an einem Zeitpunkt t_0 ist definiert als die Ableitung des Ortes x nach der Zeit t.

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.6}$$

t-v-Diagramme

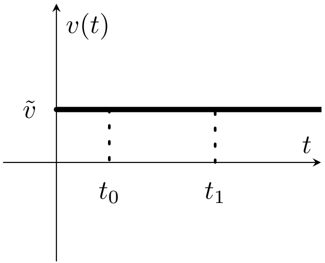


Abbildung 6: t-v-Diagramme mit konstanter Geschwindigkeit $v(t_0) = v(t_1) = \tilde{v}$

Strecke bestimmen

$$v = \frac{x}{t} \overset{\cdot t}{\Longleftrightarrow} x = vt \tag{4.7}$$

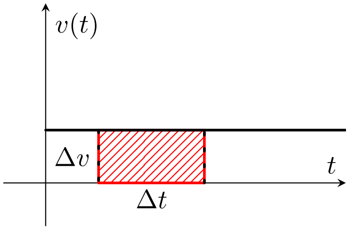


Abbildung 7: t-v-Diagramme mit konstanter Geschwindigkeit $v(t_0) = v(t_1) = \tilde{v}$

Strecke bestimmen

Definition 4.1

Die Fläche unter dem t-v-Diagramm ist die Strecke.

Strecke bestimmen

Definition 4.1

Die Fläche unter dem t-v-Diagramm ist die Strecke. Ist $v = \text{const.}$, so ist $x(t) = \Delta t \cdot v(t)$.

Strecke bestimmen

Definition 4.1

Die Fläche unter dem t-v-Diagramm ist die Strecke. Ist $v = \text{const.}$, so ist $x(t) = \Delta t \cdot v(t)$. Für die zurückgelegte Strecke zwischen t_0 und t_1 kann man also folgendes Integral bestimmen:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.8}$$

Begründung zu (4.8)

$$v(t) = x'(t) \Leftrightarrow x(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.9}$$

Fragen

1. Was sind negative Geschwindigkeiten?
2. Was ist die Ableitung im t-v-Diagramm?

negative Steigung: t-x-Diagramm

- negative Steigung $\Rightarrow$ negative Geschwindigkeit?

negative Steigung: t-x-Diagramm

- negative Steigung $\Rightarrow$ negative Geschwindigkeit?
- Geschwindigkeit als Vektorgröße.

negative Steigung: t-x-Diagramm

- negative Steigung $\Rightarrow$ negative Geschwindigkeit?
- Geschwindigkeit als Vektorgröße.
  Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist in eine Richtung gerichtet.

negative Steigung: t-x-Diagramm

- negative Steigung $\Rightarrow$ negative Geschwindigkeit?
- Geschwindigkeit als Vektorgröße.
  Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist in eine Richtung gerichtet.
- Ist die Steigung negativ, so ist die Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung gerichtet.

Das gilt auch für negative Werte im t-v-Diagramm.

negative Werte: Strecke und Zeiten

- bei Zeiten und Orten muss ein Nullpunkt gesetzt werden (z.B. Meeresspiegel).

negative Werte: Strecke und Zeiten

- bei Zeiten und Orten muss ein Nullpunkt gesetzt werden (z.B. Meeresspiegel).
- Setzt man Nullpunkt der Strecke auf MM in Richtung Ulm, so besitzt das Fahrzeug einen negativen Ortswert.

Ableitung im t-v-Diagramm

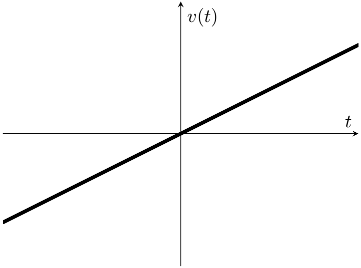


Abbildung 8: Gerade als t-v-Diagramm

Ableitung im t-v-Diagramm

Sei das t-v-Diagramm eine Gerade, dann ist die Steigung

$$m = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = a(t) \tag{5.10}$$

Die Steigung der t-v-Diagramm ist also die Beschleunigung.

$$x''(t) = v'(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = a(t) \tag{5.11}$$