Kapitel 6

Trigonometrie

6.1 Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

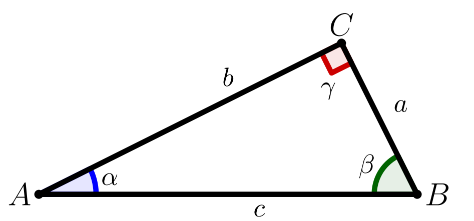

Abbildung 6.1: Betrachtete Dreiecke

Wir betrachten die rechtwinklige Dreiecke (vgl. Abb. 6.1) bei denen α bei A, β bei B und γ bei C liegt. Die Seite a liegt dann gegenüber von A, die Seite b gegenüber von B und c gegenüber von C.

Die Begriffe Kathete und Hypotenuse sind aus der 7. Klasse bereits bekannt, dennoch werden sie hier nochmals definiert:

- Die Hypotenuse (HY) ist die Seite, die gegenüber des rechten Winkels liegt.
- Die Katheten sind die Seiten, die am rechten Winkel liegen.

Definition 6.1.1 (Ankathete und Gegenkathete)**.** Betrachten wird der Winkel α, so ist die Ankathete zu α (AK_α) die Seite b, da sie an dem Winkel α liegt. Die Gegenkathete zu α (GK_α) ist dann die Seite a, da sie gegenüber von α liegt.

Sind die Seitenverhältnisse im Dreieck bekannt, so kann man die BEgriffe "Sinus", "Kosiunus" und "Tangens" einführen.

Definition 6.1.2.

$$\sin\alpha = \frac{GK_\alpha}{HY} \qquad \text{(Sinus (von) Alpha)} \qquad (6.1.1)$$

$$\cos\alpha = \frac{AK_\alpha}{HY} \qquad \text{(Kosinus (von) Alpha)} \qquad (6.1.2)$$

$$\tan\alpha = \frac{GK_\alpha}{AK_\alpha} \qquad \text{(Tangens (von) Alpha)} \qquad (6.1.3)$$

Beispielaufgabe. Betrachtet wird ein Dreieck aus Abb. 6.1, bei dem γ der rechte Winkel ist, die Hypotenuse $c = 4$ und der Winkel $\alpha = 60°$ Bestimme a und b.

Lösung 6.1.1. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin 60° &= \frac{a}{4} \\ \Leftrightarrow a &= \sin 60° \cdot 4 \\ &= 2\sqrt{3} \approx 3.46 \\ \cos 60° &= \frac{b}{4} \\ \Leftrightarrow b &= \cos 60° \cdot 4 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

6.2 Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskeis.

Definition 6.2.1 (Einheitskreis)**.** Ein Einheitskreis ist ein Kreis mit $r = 1$.

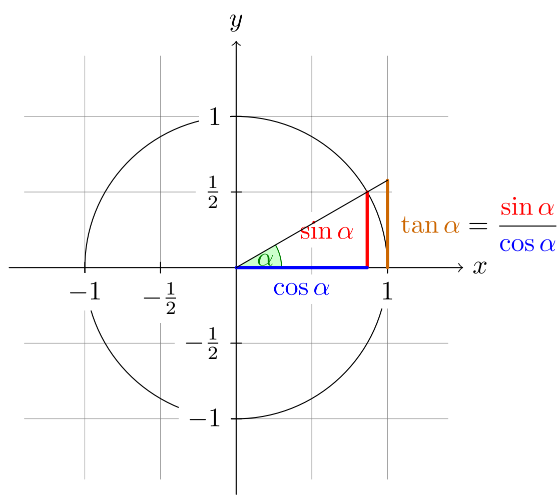

Abbildung 6.2: Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis.

Erklärung zu Abb. 6.2 Wir betrachten ein Dreieck in dem die Hypotenuse der Radius $r = 1$ ist, betrachten wir den Winkel α, so gilt für Kosinus und Sinus:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{y}{1} \\ &= y \\ \cos\alpha &= \frac{x}{1} \\ &= x \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Betrachtet man den Sinus als Funktion die jedem Wert $\alpha \in [0° : 90°]$ ein $\alpha \mapsto \sin\alpha$ zuordnet, stellt man fest dass der Wert vom Sinus wischen 0 und 1 liegt:

$$\sin 0° = 0 \text{ und } \sin 90° = 1$$

Wird jedem α nun $\alpha \mapsto \cos\alpha$ zugeordnet, stellt man fest, dass der Funktionswert zwischen 1 und 0 liegt:

$$\cos 0° = 1 \text{ und } \sin 90° = 0$$

6.2.1 Umkehrfunktion von Sinus, Kosinus und Tangens

Kennt man den Wert x, den $\sin\alpha = x$ besitzt, dann kann man mit der Umkehrfunktion des Sinus arcsin[1] herausfinden, wie groSS α ist.

$$\arcsin\left(\frac{GK_\alpha}{HY}\right) = \alpha \tag{6.2.2}$$

$$\arccos\left(\frac{AK_\alpha}{HY}\right) = \alpha \tag{6.2.3}$$

$$\arctan\left(\frac{GK_\alpha}{AK_\alpha}\right) = \alpha \tag{6.2.4}$$

6.3 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

Satz 2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= \frac{GK_x^2}{HY^2} + \frac{AK_x^2}{HY^2} \\ &= \frac{GK_x^2 + AK_x^2}{HY^2} \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Lemma 6.3.1 (Satz des Pythagoras)**.** Nach dem SdP gilt: $GK_x^2 + AK_x^2 = HY^2$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= \frac{HY^2}{HY^2} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

■

Satz 3. $\tan x = \sin x / \cos x$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\frac{GK_x}{HY}}{\frac{AK_x}{HY}} \\ &= \frac{GK_x \cdot HY}{AK_x \cdot HY} \\ &= \frac{GK_x}{AK_x} = \tan x \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

■

[1] oft verwendet man die Notation $\sin^{-1}$, die ich aber nicht verwenden möchte da $\sin^{-1} x \neq 1/\sin x$ aber $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ ist.

Satz 4. *Der Satz besteht aus zwei Teilen.*

1. $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$
2. $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$

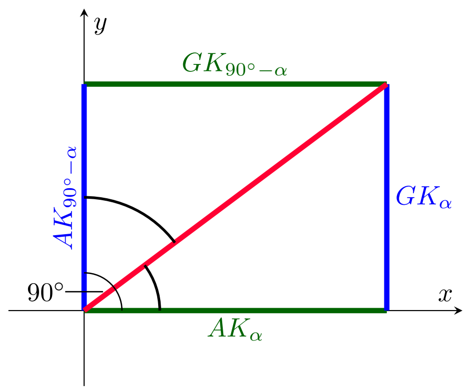

Abbildung 6.3: Abb. zum Beweis von Satz 4

Beweis. In Abb. 6.3 sieht man das folgende Seiten gleich sind.

$$\begin{aligned} GK_\alpha &= AK_{90^\circ-\alpha} \\ AK_\alpha &= GK_{90^\circ-\alpha} \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Jetzt muss man sich nur noch überlegen, die Verhältnisse überlegen:

$$\sin\alpha = \frac{GK_\alpha}{HY} \tag{6.3.5}$$
$$\cos\alpha = \frac{AK_\alpha}{HY} \tag{6.3.6}$$
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{GK_{90^\circ-\alpha}}{HY} \tag{6.3.7}$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{AK_{90^\circ-\alpha}}{HY} \tag{6.3.8}$$

Aus (6.3.4) kann man nun folgern, dass

$$\sin\alpha = \frac{GK_\alpha}{HY} = \frac{AK_{90^\circ-\alpha}}{HY} = \cos(90^\circ - \alpha) \tag{6.3.9}$$
$$\cos\alpha = \frac{AK_\alpha}{HY} = \frac{GK_{90^\circ-\alpha}}{HY} = \sin(90^\circ - \alpha) \tag{6.3.10}$$

■