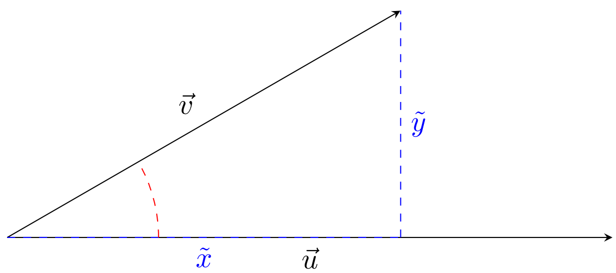
Überlegungen zu Vektoren (I)

L. Semrau

21. Juni 2021



Sei der rote Winkel $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \varepsilon$, so gilt.

$$\sin\varepsilon = \frac{\tilde{y}}{|\vec{v}|} \Leftrightarrow \tilde{y} = \sin\varepsilon \cdot |\vec{v}| \tag{1}$$

$$\text{und} \quad \cos\varepsilon = \frac{\tilde{x}}{|\vec{v}|} \Leftrightarrow \tilde{x} = \cos\varepsilon \cdot |\vec{v}|\,. \tag{2}$$

Man kann den Vektor $\vec{v}$ also auch über den Betrag und den Winkel ε definieren:

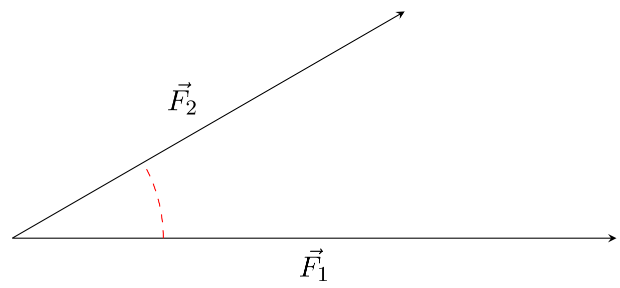
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \cdot |\vec{v}| \\ \sin\varepsilon \cdot |\vec{v}| \end{pmatrix} \tag{3}$$

Beweis. Wir versuchen dies zu beweisen in dem durch Umformungen zeigen, dass $|\vec{v}| = |\vec{v}|$:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(\sin\varepsilon \cdot |\vec{v}|)^2 + (\cos\varepsilon \cdot |\vec{v}|)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2\varepsilon \cdot |\vec{v}|^2 + \cos^2\varepsilon \cdot |\vec{v}|^2} \\ &= \sqrt{|\vec{v}|^2 \cdot \left(\sin^2\varepsilon + \cos^2\varepsilon\right)} \\ &= \sqrt{1 \cdot |\vec{v}|^2} = \sqrt{|\vec{v}|^2} \\ &= |\vec{v}| \end{aligned} \tag{4}$$

■

Kräfteaddition



Für die Addition von Kräften gilt dann:

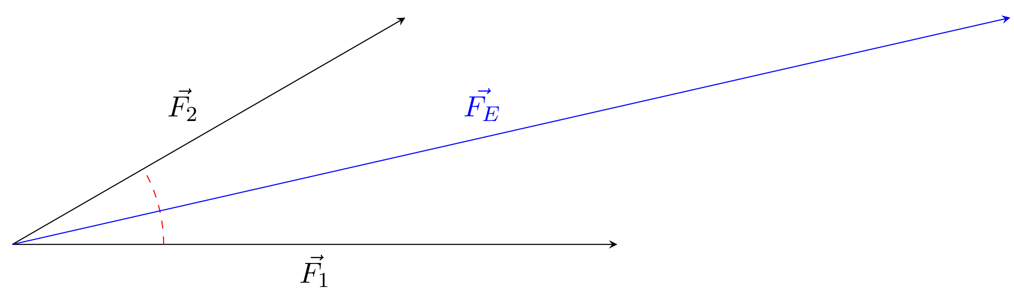
$$\vec{F_E} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right| \\ \sin\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \cos\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right| \\ \sin\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right| \end{pmatrix} \tag{5}$$

Für die GröSSe der Kraft, also dem Betrag gilt:

$$\begin{aligned} \left|\vec{F_E}\right| &= \sqrt{\left(x_1 + \cos\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right|\right)^2 + \left(\sin\varepsilon \cdot \left|\vec{F_E}\right|\right)} \\ &= \sqrt{x_1^2 + 2x_1\cos\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right| + \cos^2\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right|^2 + \sin^2\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right|^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + 2x_1\cos\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right| + \left|\vec{F_2}\right|^2 \cdot \left(\sin^2\varepsilon + \cos^2\varepsilon\right)} \\ &= \sqrt{x_1^2 + 2\cos\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right| + \left|\vec{F_2}\right|^2} \end{aligned} \tag{6}$$

Beispiel. Sei $F_1 = \left|\vec{F_1}\right| = 40\text{N}$, $F_2 = \left|\vec{F_2}\right| = 30\text{N}$ und $\varepsilon = 30°$, so ist die Gesamtkraft $\left|\vec{F_E}\right|$

$$\begin{aligned}
\vec{F_E} = \vec{F_1} + \vec{F_2} &= \begin{pmatrix} x_1 + \cos\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right| \\ \sin\varepsilon \cdot \left|\vec{F_2}\right| \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 40\text{N} + \cos(30°) \cdot 30\text{N} \\ \sin(30°) \cdot 30\text{N} \end{pmatrix} \\
&\approxeq \begin{pmatrix} 65.98\text{N} \\ 15\text{N} \end{pmatrix} \\
\left|\vec{F_E}\right| &= \sqrt{(65.98\text{N})^2 + (15\text{N})^2} \\
&\approxeq 67.66\text{N}
\end{aligned} \tag{7}$$



■